

|  |
|--|
| MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES : SEPTEMBRE 2016 |
|--|

Cet examen porte sur la matière vue lors du cours de mathématiques. Le total est sur 20 points. La pondération de chaque question est indiquée.

Inscrivez vos nom et prénom sur vos feuilles. Lisez attentivement les questions. Justifiez chaque réponse.

Bon courage à toutes et à tous.

---

QUESTION 1 : Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel de la façon suivante :  $x=0$  pour le blanc ;  $x= 1$  pour le noir ;  $x= 0.01$ ,  $x = 0.02$  et ainsi de suite jusqu'à 0.99 par pas de 0.01 pour toutes les nuances intermédiaires (du gris clair au gris foncé).

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ». Elles sont définies sur l'intervalle  $[0;1]$  et possèdent les quatre propriétés suivantes :  $f(0) = 0$  ;  $f(1) = 1$  ;  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$  ;  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Une nuance codée  $x$  est assombrie par la fonction  $f$  si  $f(x) > x$ , et éclaircie si  $f(x) < x$ .

On s'intéresse à des fonctions de retouche  $f$  dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $f(x) \leq x$ . On mesurera l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction  $f$ , et les droites verticales d'équations respectives  $x=0$  et  $x=1$ . Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire.

Laquelle de ces deux fonctions,  $f_1(x) = x.e^{x^2-1}$  ou  $f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$ , a pour effet d'éclaircir le plus l'image?

4 points

---

Pour les étudiants de 3<sup>eme</sup>, en lieu et place, vous pouvez étudier la fonction  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$  et en déduire l'aspect de la relation  $y^2 = x^2 - x^4$  (un dessin est bienvenu).

---

QUESTION 2 : Démontrer, **AU CHOIX**, que le volume d'une sphère de rayon  $r$  vaut  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  **OU** que l'aire du cercle vaut  $S = \pi r^2$ .

2 points

---

QUESTION 3 : Est-ce correct ? Oui ? Non ? Pourquoi ?

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

2 points

---

QUESTION 4 :

Dans un échantillon aléatoire de 200 résultats à un test, on observe une moyenne  $\mu$  de 9,8 et un écart-type  $\sigma$  de 2,1. Estimez le taux d'échec (note  $< 10$ ) probable de l'échantillon. Utilisant ce taux, déterminez un intervalle de confiance à 95% pour cette proportion d'échec dans la population.

4 points

---

QUESTION 5 :

Je mélange deux litres d'eau à dix degrés avec un litre d'eau à quarante degrés. J'obtiens trois litres d'eau à ... ?

1 point

---

QUESTION 6 : Un survivant de l'apocalypse vise un zombie avec deux chances sur trois de l'exterminer.

1. Un chargeur ne comportant que 15 balles, en moyenne combien pourra-t-il abattre de zombies avant de se faire dévorer s'il ne lui reste qu'un chargeur ?
2. Avec 10 chargeurs, quelle est la probabilité d'exterminer au moins 90 zombies ?
3. Combien de chargeurs devrait-il posséder afin d'être certain d'exterminer une horde d'au plus 200 zombies avec une probabilité supérieure à 0,95 ?

4 points

---

QUESTION 7 : *Cher condisciple de Sciences Biomédicales,*

*Je suis étudiante en dernière année de kinésithérapie et je galère un peu avec mes statistiques. Mes professeurs m'ont conseillé de prendre contact avec vous pour voir s'il était possible que vous m'aidiez.*

*En effet, je suis un peu larguée et ces termes ne me disent rien ... Je peux déjà vous expliquer mon hypothèse et mon protocole de mémoire.*

*Je souhaiterais confirmer ou infirmer l'hypothèse que la posture et l'équilibre chez un sujet sain est influencée par la position de la mandibule. J'ai donc pris une population de 30 sujets, chacun sont montés sur la plateforme de stabilométrie (mon outil de mesure emprunté à l'école), et j'ai enregistré 6 mesures de 51 s (dans 6 positions de la mandibule différentes), sur les 30 personnes à chaque fois. Les mesures sont données en cm. J'ai déjà encodé tout mes résultats dans des tableaux excel, et j'ai pu réaliser une moyenne de chaque paramètres étudiés dans les 6 positions mandibulaires de ma population entière.*

*Que puis-je faire avec cela ? Merci d'avance pour votre aide.*

*Bien à vous,*

*Laura (master 1, kinésithérapie)*

2 points

---